

Dev n° 35

Ref: Ravière "Petit guide de calcul différentiel" p 109 exo 39

Titre: L'Exponentielle matricielle est e^x

Thm:

Soient E et F e.n., $U \subset E$ ouvert et une suite d'applications $f_k: U \rightarrow F$ différentiables sur U . On s.q. (i) les f_k cv s sur U et (ii) Df_k cv unif sur U .

Alors, $\lim f_k$ est différentiable sur U et $D(\lim f_k) = \lim Df_k$.

De plus, si les f_k sont $C^1(U)$, alors il en est de même pour $\lim f_k$.

Application:

Exponentielle matricielle est e^x sur $M_n(\mathbb{R})$.

Démon: (thm)

Notons: $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in F, \forall x \in U$

$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} Df_k(x) \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in U$

* P.q. $\lim f_k$ est différentiable sur U :

• cv unif:

On a (ii) donne: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ t.q. $\forall k \geq N, x \in U$:

$$\|Df_k(x) - g(x)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \varepsilon. \quad (*)$$

De plus, par $j \geq N$:

$$\|Df_j(x) - Df_k(x)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq 2\varepsilon.$$

• inégalité de la moyenne:

Soit $a \in U$. Par $r > 0$ assez petit, $B(a, r) \subset U$ (car U ouvert)

convexe

Appliquons l'inégalité de la moyenne à $f_j - f_k$ entre a et $a+h$:

$$\|f_j(a+h) - f_j(a) - f_k(a+h) + f_k(a)\|_F \leq 2\varepsilon \|h\|_E$$

• Différentiabilité:

Par le fait que f_j sont diff en a :

$$f_j(a+h) - f_j(a) = Df_j(a)(h) + o(\|h\|)$$

Donc, $\exists \alpha < r$ t.q. $\|h\|_E \leq \alpha$.

Donc,

$$\|f_j(a+h) - f(a) - Df_k(a)h\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E \quad \text{par } \|h\|_E \leq \alpha.$$

• 3ème inégalité:

De plus, par (*) en a :

$$\|Df_k(a)h - g(a)h\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E.$$

• Conclusion:

En additionnant les 3 inégalités on a:

$$\|f_j(a+h) - f_j(a) - g(a)h\|_F \leq 4\varepsilon \|h\|_E, \quad \text{avec } \|h\|_E \leq \alpha \text{ et } j \geq N.$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j(a+h) - f_j(a) - g(a)h\|_F = 0$$

$$\|f_j(a+h) - f_j(a) - g(a)h\|_F \leq 4\varepsilon \|h\|_E, \quad \text{avec } \|h\|_E \leq \varepsilon \text{ et } j \geq N.$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f(a+h) - f(a) - g(a)h\|_F \leq 4\varepsilon \|h\|_E$$

Donc, la diff de f en a est $Df(a) = g(a)$.

Donc, $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ est diff. sur U et $\lim_{k \rightarrow \infty} Df_k(a) = Df(a)$

* Cas $\mathcal{E}^1$:

Comme les f_k sont $\mathcal{E}^1$, les Df_k sont continue sur U et il en est de même de $Df = \lim Df_k$ grâce à la cv unif. $\square$

Application:

$$E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \mu_p : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \frac{x^p}{p!} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est } \mathcal{E}^1 \text{ et } f_p = \sum_{k=0}^p u_k$$

$$D\mu_p(x) : H \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k H x^{p-1-k}}{p!}$$

Vérifions les hypothèses:

* Convergence $\sum D\mu_k$:

On a:

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|H\| \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \|D\mu_k(x)(H)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k H x^{p-1-k}}{p!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\|x\|^{p-1} \|H\|}{p!} \leq p \frac{\|x\|^{p-1}}{p!} = 1 \\ &\leq \frac{\|x\|^{p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \forall R > 0, \forall x \in B(0, R), \quad \|D\mu_k(x)\| \leq \frac{R^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Donc $\sum D\mu_k(x)$ converge absolument sur $B(0, R) \Rightarrow$ cv unif.

* Convergence f_p :

Par def de l'exponentielle matricielle

* CCL: par le thm, l'exponentielle matricielle est $\mathcal{E}^1$ sur les bases, donc sur E et $D\exp(x)H = \sum_{p=1}^{\infty} D\mu_p(x)H$ $\square$

Annexe:

• Calcul diff. expo. matricielle:

$$(x+H)^p = x^p + (x^{p-1}H + x^{p-2}HX + \dots + Hx^{p-1}) + o(\|H\|^2)$$

$$\begin{aligned} \mu_p(x+H) &= \frac{(x+H)^p}{p!} = \frac{x^p + (x^{p-1}H + x^{p-2}HX + \dots + Hx^{p-1}) + o(\|H\|^2)}{p!} \\ &= \mu_p(x) + \underbrace{\frac{x^{p-1}H + \dots + Hx^{p-1}}{p!}}_{D\mu_p(x)(H)} + o(\|H\|^2) \end{aligned}$$

• Inégalité de la moyenne:

Théorème — Pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, il existe un réel c dans $]a, b[$ vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration:

En utilisant le [premier théorème fondamental de l'analyse](#), ou alors en court-circuitant la théorie de l'intégrale de Riemann et en prenant, comme *définition* de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle, la variation sur cet intervalle de l'une quelconque de ses [primitives](#) (donc en admettant qu'il en existe), le théorème de la moyenne devient une simple reformulation du [théorème des accroissements finis](#).

En effet, si F est une primitive de f , alors le théorème des accroissements finis pour F fournit l'existence d'un réel c strictement compris entre a et b tel que

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a},$$

ce qui est le résultat souhaité puisque $F' = f$ et $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

• La limite uniforme de fonction :

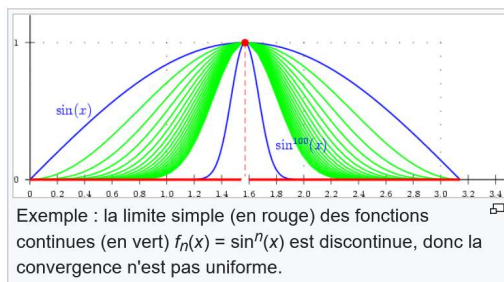
Soient X un [ensemble](#)¹, (Y, d) un [espace métrique](#), et A un [sous-ensemble](#) de X . Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y , et f une fonction définie sur X à valeurs dans Y . On dit que la suite $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f sur A si :

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in A, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon].$$

On a le résultat fondamental suivant :

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions [continues](#) convergeant uniformément sur X vers une fonction f alors f est continue sur X .

Ou encore (par [contraposition](#)) une fonction discontinue ne peut pas être limite uniforme de fonctions continues.



Démonstration

[\[masquer\]](#)

Montrons la continuité en un point a fixé. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe un entier N tel que

$$\forall x \in X, d(f_N(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

La fonction f_N étant continue en a , il existe un ouvert U contenant a tel que

$$\forall x \in U, d(f_N(x), f_N(a)) \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\forall x \in U \quad d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \leq 3\varepsilon.$$

Thm:

Soient E, F e.n., U ouvert de E .

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite d'applications de U dans F diff. sur U .

S.g:

(i) f_k cv simp. sur U

(ii) Df_k cv unif. sur U

Alors, $\lim_k f_k$ est diff. sur U et $D(\lim_k f_k) = \lim_k (Df_k)$.

De plus, si les f_k sont e^1 , alors il en est de m pour $\lim_k f_k$.

Application:

exp: $\Pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{R})$ est e^1 .

Démo: (thm)

Notons: $f(x) = \lim_k f_k(x)$, $\forall x \in U$

$g(x) = \lim_k Df_k(x)$

* M.q $\lim_k f_k$ est diff. sur U :

↳ cv unif.: par (ii) on a pour $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall k \geq N$,

$\forall x \in U$:

$$\|Df_k(x) - g(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$$

Et par $j \geq N$:

$$\|Df_k(x) - Df_j(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq 2\varepsilon$$

↳ Inégalité du la moyenne: Soit $a \in U$, pour $r > 0$ assez petit, $B(a, r) \subset U$. On a:

↳ convexe

$$\|f_j(a+h) - f_j(a) - f_k(a+h) + f_k(a)\|_F \leq 2\varepsilon \|h\|_E$$

↳ Differentiabilité:

$\exists \alpha < r$ t.q $\|h\|_E \leq \alpha$ et

$$\|f_j(a+h) - f_j(a) - Df_k(a) \cdot h\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$$

↳ 3ème inégalité:

$$\|Df_k(a) \cdot h - g(a)h\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$$

↳ Conclusion:

En combinant les inégalités:

$$\|f_j(a+h) - f_j(a) - g(a)h\|_F \leq 4\varepsilon \|h\|_E$$

$$\xrightarrow{j \rightarrow \infty} \Rightarrow \|f(a+h) - f(a) - g(a)h\|_F \leq 4\varepsilon \|h\|_E$$

Donc, $Df(a) = g(a)$.

OK.

* Cas e^1 :

$f_k \in e^1(U) \Rightarrow Df_k \in e^0(U)$ et cv unif sur U .

Donc, $\lim_k Df_k \in e^0(U)$.

Donc, $f \in e^1(U)$ □

Application:

$E = F = \Pi_n(\mathbb{R})$.

$\forall p \in \mathbb{N}$; $\mu_p: x \in \Pi_n(\mathbb{R}) \mapsto \frac{x^p}{p!} \in \Pi_n(\mathbb{R})$ e^1

$$f_p = \sum_{k=0}^p \mu_k$$

$$D\mu_p(x): H \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k H x^{p-1-k}}{p!}$$

* co des f_p par def. de l'exp.

* cv de $\sum D\mu_p$:

Par $H \in \Pi_n(\mathbb{R})$ et $\|H\| \leq 1$ on a:

$$\|D\mu_p(x) \cdot H\| \leq \frac{\|x\|^{p-1}}{(p-1)!}$$

Par $R > 0$, on a $\sum_k D\mu_k(x)$ cv abs. sur $B(0, R)$

$\Rightarrow$ cv unif. sur $B(0, R)$

* Conclusion:

Par le thm on a exp $\in e^1(\Pi_n(\mathbb{R}), \Pi_n(\mathbb{R}))$ car e^1 sur toutes les boules □